



DESCOMPOSICIÓN TOPOLÓGICA DE REDES DE ABASTECIMIENTO DE AGUA POTABLE PARA SU ESTIMACIÓN DE ESTADO

Emilio Ruiz Gómez¹, Sarai Díaz García², Javier González Pérez³

^{1,2,3}ETSI Caminos, Canales y Puertos Universidad de Castilla-La Mancha, Avda. Camilo José Cela s/n, 13071, Ciudad Real, España

²*Sarai.Diaz@uclm.es*

RESUMEN

La Estimación del Estado Hidráulico (EEH) es una técnica que permite inferir el estado más probable en una red de abastecimiento a partir de las medidas disponibles y el modelo hidráulico del sistema. La calidad de los resultados se suele evaluar a posteriori mediante procedimientos para cuantificar la incertidumbre, siendo el método First Order Second Moment (FOSM) uno de los más utilizados. Aplicaciones recientes han permitido detectar que este método presenta mala escalabilidad cuando se aplica para cuantificar la incertidumbre de la EEH en grandes sistemas, dando lugar a tiempos de cálculo excesivos y/o problemas de condicionamiento numérico. Este trabajo presenta un procedimiento que permite asegurar la aplicación de la formulación FOSM para cuantificar la incertidumbre de la estimación de estado. El método consiste en dividir la red y calcular la incertidumbre de cada subred de forma independiente, para luego introducir las relaciones entre las subredes y actualizar las incertidumbres teniendo en cuenta esta interacción. Los resultados muestran que las formulaciones son equivalentes y mejoran la aplicabilidad del método en grandes sistemas.

Palabras clave

Estimación de estado, topología, descomposición, incertidumbre, abastecimiento

1. INTRODUCCIÓN

La Estimación del Estado Hidráulico (EEH) es una técnica que permite calcular el estado más probable de presiones y flujos en una red de abastecimiento a partir de las medidas disponibles en el sistema y el modelo hidráulico subyacente. Se trata en última instancia de un proceso de optimización, que minimiza la diferencia entre las medidas disponibles y los valores estimados teniendo en cuenta las ecuaciones de gobierno del flujo y la incertidumbre de las medidas a lo largo del proceso [1]. En los últimos años ha probado ser una herramienta eficiente para la monitorización de redes de abastecimiento, ya que además de aportar información sobre el valor esperado de las variables, permite cuantificar la incertidumbre de estas estimaciones (e.g., [2], [3]).

SMART WATER:

Transición hacia sistemas inteligentes, sostenibles y resilientes

El cálculo de incertidumbre se suele plantear como un paso posterior a la estimación del estado hidráulico en sí. Hay varias alternativas para evaluar la incertidumbre en este tipo de aplicaciones. Una de las más conocidas consiste en la aplicación del First-Order Second-Moment (FOSM) method [4], que aproxima la varianza de los resultados planteando una expansión en serie de Taylor de primer orden alrededor del valor medio de los parámetros de entrada [5]. Esta propuesta analítica es razonable siempre que la función se pueda asumir lineal en torno al óptimo, que es el caso en muchos problemas relacionados con la modelización de redes de abastecimiento (e.g., [6]; [7]), por ejemplo, en la cuantificación de la incertidumbre de la EEH (e.g., [8]).

El método FOSM, hoy en día muy consolidado en el ámbito de las redes de abastecimiento, tiene un coste computacional menor que otras alternativas (como las simulaciones de Montecarlo), pero presenta mala escalabilidad cuando se aplica para cuantificar la incertidumbre de la EEH en grandes sistemas. El método funciona bien en redes de pequeño tamaño, pero está asociado a tiempos de cálculo excesivos y/o problemas de condicionamiento numérico cuando crece el tamaño del sistema [9]. Este trabajo presenta un procedimiento para la descomposición topológica de redes de abastecimiento que permite asegurar la aplicación de la formulación FOSM para la cuantificación de la incertidumbre de la EEH en redes de cualquier tamaño.

2. METODOLOGÍA

En este apartado se describe brevemente la formulación de la EEH y el método FOSM tradicional, para luego presentar la formulación descompuesta que mejora la aplicación del método en grandes sistemas.

2.1 FORMULACIÓN EEH

La EEH se plantea como un problema de optimización en el que se minimizan las diferencias entre las variables de estado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (en este caso, nivel de energía en cada nodo) y las medidas disponibles en el sistema $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$:

$$\min_{\mathbf{x}} f_{obj}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\mathbf{z} - \mathbf{g}(\mathbf{x})]^T \cdot \mathbf{W} \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{g}(\mathbf{x})] \quad (1)$$

Donde $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se refiere a las relaciones no lineales existentes entre las variables de estado y las medidas (ecuaciones de gobierno del flujo en la red) y $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es la matriz de pesos, que se puede calcular como $\mathbf{W} = \mathbf{C}_z^{-1}$, donde $\mathbf{C}_z \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es la matriz de varianza-covarianza de las medidas. El resultado de la estimación de estado se considera disponible en este trabajo, que se centra en el cálculo de la incertidumbre asociada conforme a los siguientes apartados.

2.2 FORMULACIÓN FOSM ORIGINAL

De acuerdo con el FOSM, la matriz varianza-covarianza de las variables de estado $\mathbf{C}_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se puede calcular como:

$$\mathbf{C}_x = (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{J})^{-1} \quad (2)$$

SMART WATER:

Transición hacia sistemas inteligentes, sostenibles y resilientes

donde $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es la matriz jacobiana de medidas del sistema, que se puede calcular de acuerdo con [10] y [1]. A su vez, la matriz varianza covarianza del resto de variables del sistema $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^r$ se puede calcular aplicando el método FOSM de nuevo [2]:

$$\mathbf{C}_v = \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{V}^T \quad (3)$$

siendo $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ la matriz jacobiana de las variables \mathbf{v} , que se puede calcular de forma análoga a \mathbf{J} .

Trabajos anteriores han detectado que esta formulación presenta mala escalabilidad cuando se aplica a grandes sistemas [9]. Esto ocurre porque el cálculo de \mathbf{C}_x requiere invertir una matriz, cuya complejidad computacional es proporcional al cubo de la dimensión de la matriz. Además, en estas matrices coexisten tuberías asociadas a regímenes de flujo muy distinto, que dan lugar a órdenes de magnitud diferentes en \mathbf{J} . El problema de mal condicionamiento se ve agravado por errores de truncamiento, y puede llegar a un punto en el que no sea posible invertir las matrices [9, 2]. La formulación propuesta soluciona este problema.

2.3 FORMULACIÓN FOSM DESCOMPUESTA

El método propuesto consiste en dividir la red y (1) calcular la incertidumbre de cada subred de forma independiente, (2) identificar las relaciones entre las subredes, y (3) actualizar las incertidumbres teniendo en cuenta esta interacción. La metodología para la división de la red queda fuera del objeto de este trabajo, ya que en muchas ocasiones vendrá marcada por cuestiones operacionales, como la estructuración de la red por sectores o DMAs (del inglés, *District Metered Areas*).

2.3.1. Cálculo de la incertidumbre de cada subred

El cálculo de la incertidumbre de cada subred se realiza de forma análoga al apartado 2.2. La única diferencia es que ahora se aplica para cada una de las subredes $k = 1, 2, \dots, s$:

$$\mathbf{C}_{y_k} = (\mathbf{J}_k^T \cdot \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{J}_k)^{-1}; \forall k = 1, 2, \dots, s \quad (4)$$

Es importante resaltar que la matriz varianza-covarianza de cada subred se denota como $\mathbf{C}_{y_k} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$; $\forall k = 1, 2, \dots, s$ (subíndice y) y no como $\mathbf{C}_{x_k} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$; $\forall k = 1, 2, \dots, s$ (subíndice x) para reflejar que representa la incertidumbre de cada subred sin considerar la interacción con el resto (ver Figura 1).

2.3.2. Interacción entre subredes

La interacción entre las subredes se tiene en cuenta gracias a una matriz jacobiana de unión $\mathbf{J}_b \in \mathbb{R}^{(\sum_{k=1}^s n_{b_k}) \times n_b}$ que representa la relación entre las variables de estado de contorno en cada una de las subredes \mathbf{y}_{b_k} ; $\forall k = 1, 2, \dots, s$ y la variable de estado equivalente en la red original $\mathbf{x}_b \subseteq \mathbf{x}$. La Figura 1 muestra la descomposición conceptual de la red en diferentes subredes, relacionadas entre sí a través de las variables de contorno entre ellas. La matriz jacobiana de unión está formada por la matriz jacobiana de unión de cada subred, en la que hay valores 1 en las posiciones en las que existe correspondencia entre la variable de estado de contorno en cada subred (representadas como filas) y la variable de estado equivalente en la red original (representada en columnas), y valores 0 en caso contrario.

SMART WATER:

Transición hacia sistemas inteligentes, sostenibles y resilientes

Del mismo modo, se puede construir una matriz varianza-covarianza de unión $\mathbf{C}_b \in \mathbb{R}^{(\sum_{k=1}^s n_{b_k}) \times (\sum_{k=1}^s n_{b_k})}$ a partir de la matriz varianza-covarianza de las subredes independientes $\mathbf{C}_{y_k}; \forall k = 1, 2, \dots, s$ calculada en (4). La matriz global será el resultado de colocar en diagonal las matrices de unión de cada subred, cada una de las cuales se obtiene seleccionando las posiciones de la matriz varianza-covarianza independiente asociada a variables de contorno. El detalle de esta formulación se explica en [11].

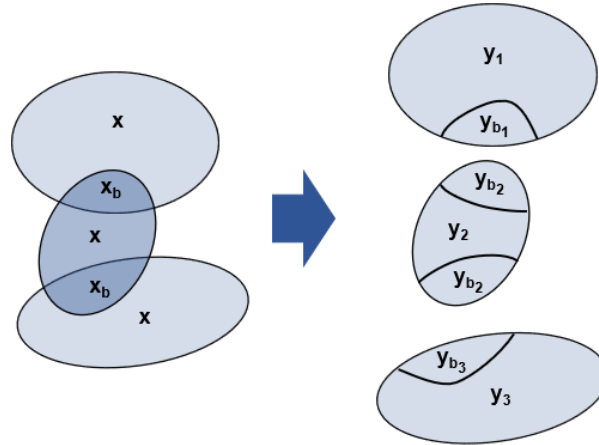


Figura 1: Descomposición conceptual de la red en subredes. Variables de contorno

2.3.3. Actualización de la incertidumbre debido a la interacción

Para actualizar la incertidumbre calculada en (4) es necesario extender las matrices jacobianas originales para tener en cuenta la interacción. Esto hace necesario trabajar con una matriz jacobiana extendida para cada subred $\mathbf{J}_{e_k}; \forall k = 1, 2, \dots, s$. Esta matriz parte del jacobiano independiente de cada subred \mathbf{J}_k , añadiendo tantas filas como sea necesario para tener en cuenta las filas del jacobiano de unión que no están incluidas en la subred k . Esto puede requerir añadir ceros en columnas hasta completar el número de variables de contorno.

Del mismo modo, es necesario generar una matriz de pesos extendida $\mathbf{W}_{e_k}; \forall k = 1, 2, \dots, s$ a partir de la matriz de pesos de cada subred de forma independiente \mathbf{W}_k . Esta extensión se consigue colocando en la diagonal la inversa de la matriz varianza-covarianza de unión para todas las subredes que no son la subred k objeto de análisis.

Estas dos matrices, permiten calcular finalmente la matriz varianza-covarianza de las variables de estado de la red total $\mathbf{C}_{x_k}; \forall k = 1, 2, \dots, s$:

$$\mathbf{C}_{x_k} = (\mathbf{J}_{e_k}^T \cdot \mathbf{W}_{e_k} \cdot \mathbf{J}_{e_k})^{-1}; \forall k = 1, 2, \dots, s \quad (5)$$

Los valores obtenidos para $\mathbf{C}_{x_k}; \forall k = 1, 2, \dots, s$ (ecuación 5, formulación FOSM descompuesta) deben coincidir con los valores obtenidos a partir de la red completa (ecuación 2, formulación FOSM original).

3. RESULTADOS

La formulación FOSM descompuesta se ha aplicado en este trabajo a un ejemplo ilustrativo y dos casos de estudio para probar la equivalencia con la formulación FOSM original y las mejoras asociadas al nuevo método, respectivamente.

SMART WATER:

Transición hacia sistemas inteligentes, sostenibles y resilientes

3.1 EJEMPLO ILUSTRATIVO

La Figura 2 muestra la disposición en planta y división en subredes (S) asumida para este ejemplo ilustrativo. Los nodos (N) tienen asignado un valor de demanda igual al número del nodo en L/s. Todas las tuberías (P) tienen 100 m de longitud, 100 mm de diámetro y un coeficiente Hazen Williams de 100. En lo que respecta a las medidas, se considera que se conocen todas las demandas, valores de rugosidad y niveles en los depósitos. Los valores base que se acaban de describir se utilizan como valor esperado de la medida. Se asume una desviación estándar de 1 m para medidas de nivel y 7,5 para coeficientes de Hazen-Williams, mientras que para demandas se asume un coeficiente de variación de 1,1. Se considera además que existen medidas adicionales aleatorias de caudal y/o medidas de presión hasta alcanzar un 30% de redundancia.

El error relativo obtenido al calcular la incertidumbre de las variables hidráulicas con el método FOSM original y el método FOSM descompuesto tiene un valor de $7,22 \cdot 10^{-8}$. Este valor tan bajo refleja la equivalencia entre las dos formulaciones.

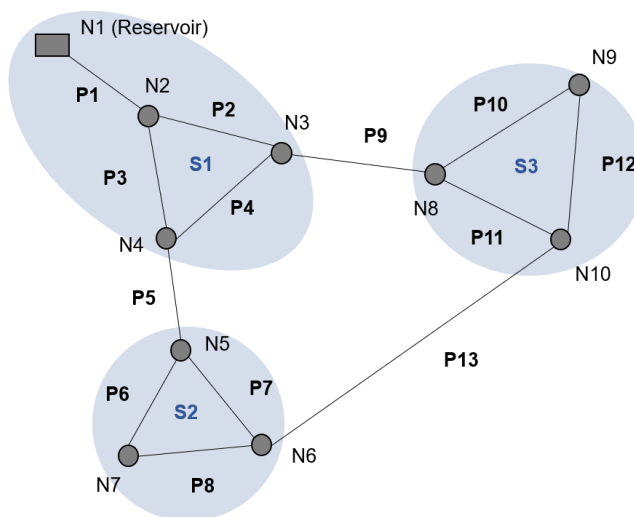


Figura 2: Disposición en planta y subdivisión en subredes del ejemplo ilustrativo

3.2 CASOS DE ESTUDIO

En este trabajo se han utilizado las redes KL [12] y Sabsevar [13] como sistemas de tamaño medio (KL: 934 nodos, 1273 tubos) y grande (Sabsevar: 9421 nodos, 9702 tubos), respectivamente (ver Figura 3). Se han asumido las mismas premisas que en el caso ilustrativo en lo que respecta a las medidas.

El condicionamiento numérico de las matrices involucradas en la cuantificación de la incertidumbre [condición de la matriz a invertir en la ecuación (2) vs condición media de las matrices a invertir en (5)] es de $1,3 \cdot 10^{13}$ (formulación original) frente a $6,6 \cdot 10^{11}$ (formulación descompuesta) para KL y $1,8 \cdot 10^{12}$ (formulación original) frente a $1,2 \cdot 10^{10}$ (formulación descompuesta) para Sabsevar. Estas cifras reflejan que la formulación descompuesta mejora el condicionamiento numérico de las matrices involucradas.

SMART WATER:

Transición hacia sistemas inteligentes, sostenibles y resilientes

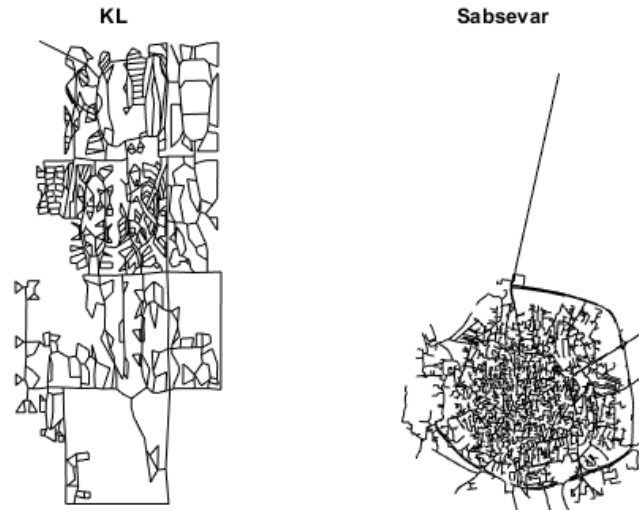


Figura 3: Disposición en planta de los casos de estudio

En lo que respecta al tiempo de cálculo, ejecutar la formulación FOSM original en KL requiere 0,43 s cuando se utiliza Matlab R2020a en un ordenador con 16 GB de RAM y procesador Intel Core i7-10510U de 1.80 GHz y 4 núcleos. Esta cifra aumenta ligeramente (0,64 s) cuando se emplea la formulación descompuesta. Para Sabsevar, el tiempo de cálculo con la formulación original es de 686,24 s, valor que se reduce a 13,67 s cuando se emplea el nuevo método. Estos resultados reflejan que el tiempo de cálculo se mantiene similar o incluso empeora cuando se aplica el nuevo método a redes de tamaño mediano. Por el contrario, el tiempo se reduce en casi dos órdenes de magnitud cuando se trabaja con sistemas de gran tamaño.

Estos resultados prueban que el método propuesto mejora tanto el condicionamiento numérico como la eficacia computacional de la formulación FOSM tradicional en grandes sistemas. El trabajo [11] recoge resultados adicionales en lo que respecta a la complejidad temporal de ambas formulaciones, analizando la notación O-Grande (Big-O) de cada algoritmo y estableciendo las condiciones de aplicabilidad que garanticen la ventaja computacional del método propuesto

4. CONCLUSIONES

La metodología presentada en este trabajo es equivalente a la formulación FOSM original, pero presenta ventajas computacionales y numéricas cuando se aplica a grandes sistemas. Por tanto, es clave para asegurar la aplicación fiable y sistemática de la EEH a redes operacionales.

AGRADECIMIENTOS

Esta publicación forma parte del proyecto de I+D+i PID2019-111506RB-00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033. Los autores agradecen también la colaboración de la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha a través del proyecto SBPLY/19/180501/000162, cofinanciado por Fondos FEDER - Una manera de hacer Europa.

SMART WATER:

Transición hacia sistemas inteligentes, sostenibles y resilientes

REFERENCIAS

- [1] E. Ruiz, S. Díaz and J. González, “State variable implications on Hydraulic State Estimation”, *Water Resources Management*, vol. 36, no. 8, 2022, pp. 2549-2569, <https://doi.org/10.1007/s11269-022-03152-x>
- [2] S. Díaz, J. González and R. Mínguez, “Uncertainty evaluation for constrained state estimation in water distribution systems”, *Journal of Water Resources Planning and Management*, vol. 142, no. 12, 2016, 06016004, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)WR.1943-5452.0000718](https://doi.org/10.1061/(ASCE)WR.1943-5452.0000718)
- [3] S. G. Vrachimis, S. Timotheou, D.G. Eliades and M.M. Polycarpou, “Iterative hydraulic interval state estimation for water distribution networks”, *Journal of Water Resources Planning and Management*, vol. 145, no.1, 2019, 04018087, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)WR.1943-5452.0001011](https://doi.org/10.1061/(ASCE)WR.1943-5452.0001011)
- [4] N. Branisavljevic, D. Prodanovic and M. Ivetic, “Uncertainty reduction in water distribution network modelling using system inflow data”, *Urban Water Journal*, vol. 6, no.1, 2009, pp. 69-79, <https://doi.org/10.1080/15730620802600916>
- [5] Y.K., Tung and B.C. Yen, *Hydrosystems Engineering Uncertainty Analysis*, McGraw-Hill: New York, USA, 2005
- [6] K. E. Lansey, W. El-Shorbagy, I. Ahmed, J. Araujo and C.T. Haan, “Calibration assessment and data collection for water distribution networks”, *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 127, no. 4, 2001, pp. 270-279, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2001\)127:4\(270\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2001)127:4(270))
- [7] Z. Kapelan, D.A. Savic and G.A. Walters, “Multiobjective sampling design for water distribution model calibration”, *Journal of Water Resources Planning and Management*, vol. 129, no. 6, 2003, pp. 466-479, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9496\(2003\)129:6\(466\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9496(2003)129:6(466))
- [8] A. Bargiela and G.D. Hainsworth, “Pressure and flow uncertainty in water systems”, *Journal of Water Resources Planning and Management*, vol. 115, no. 2, 1989, pp. 212-229, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9496\(1989\)115:2\(212\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9496(1989)115:2(212))
- [9] J. González, R. Mínguez y S. Díaz, Estudio de observabilidad para la estimación del estado hidráulico de la red sectorizada de abastecimiento, Cuaderno de I+D+i 23, Canal de Isabel II: Madrid, España, 2016.
- [10] S. Díaz, J. González and R. Mínguez, “Observability analysis in water transport networks: An algebraic approach”, *Journal of Water Resources Planning and Management*, vol. 142, no. 4, 2016, 04015071, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)WR.1943-5452.0000621](https://doi.org/10.1061/(ASCE)WR.1943-5452.0000621)

SMART WATER:

Transición hacia sistemas inteligentes, sostenibles y resilientes

- [11] E. Ruiz, S. Díaz and J. González, “Decomposed uncertainty evaluation for hydraulic state estimation in water supply systems”, *Journal of Water Resources Planning and Management*, vol. 149, no. 4, 2023, 04023006, <https://doi.org/10.1061/JWRMD5.WRENG-5924>

- [12] Water Distribution System Operations, Water distribution system research database, 2022, <http://www.uky.edu/WDST/database.html> (Última consulta: 1 enero 2022)

- [13] M. Mair, C. Mikovits, M. Sengthaler, M. Schöpf, H. Kincel, C. Urich, M. Kleidorfer, R. Sitzenfrei and W. Rauch, “The application of a web-geographic information system for improving urban water cycle modeling”, *Water Science and Technology*, vol. 70, no. 11, 2014, pp. 1838-1846, <https://doi.org/10.2166/wst.2014.327>